

# ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỆT ĐỘ ĐẾN ĐỘ VĨNG ĐỘNG CỦA DẦM CÓ KÍCH THƯỚC NANO LÀM BẰNG VẬT LIỆU CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN

Bùi Văn Tuyền, Nguyễn Anh Tuấn  
Trường Đại học Thủy lợi, email: tuyenbv@thlu.edu.vn

## 1. GIỚI THIỆU CHUNG

Trong số các kết cấu có kích thước nano, dầm có kích thước nano thu hút ngày càng nhiều sự chú ý do các ứng dụng kỹ thuật tiềm năng to lớn của chúng, chẳng hạn như dây nano, đầu dò nano, kính hiển vi lực nguyên tử (AFM), thiết bị truyền động nano và cảm biến nano... Trên thế giới, các nghiên cứu về dầm nano làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên chủ yếu về dao động tự do và cưỡng bức chưa xét đến ảnh hưởng của yếu tố nhiệt độ. Ảnh hưởng của nhiệt độ có một số tác giả quan tâm nhưng chủ yếu là phân tích dao động tự do và mất ổn định. Một số tác giả có xét ảnh hưởng của chúng nhưng sử dụng phương pháp giải tích [1, 2, 3, 4].

Nghiên cứu này tập trung phân tích ảnh hưởng của sự tăng nhiệt độ đến độ võng động của dầm có kích thước nano làm bằng vật liệu có cơ tính biến thiên dưới tác dụng của tải trọng di động bằng phương pháp phân tử hữu hạn.

## 2. MÔ HÌNH TOÁN

Xét một dầm giản đơn có kích thước nano làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên (FGM), chịu tác động của một lực  $P$  không đổi, luôn tiếp xúc và di chuyển dọc theo chiều dài dầm với vận tốc không đổi. Dầm đặt trong môi trường nhiệt độ cao, mặt trên dầm có nhiệt độ  $T_c$  và mặt dưới  $T_m$  là nhiệt độ môi trường.

Dầm được giả định được làm từ hai vật liệu thành phần là gốm và kim loại với tỉ lệ thể tích thay đổi theo hàm số lũy thừa. Tính chất hiệu dụng của vật liệu xác định bằng mô hình Voigt và phụ thuộc vào nhiệt độ.

Trường nhiệt độ phân bố theo chiều cao của dầm FGM có thể nhận được từ việc giải phương trình truyền nhiệt Fourier.

Dựa trên lý thuyết dầm Euler-Bernoulli:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - zw_{0,x} \quad (1)$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t)$$

trong đó:  $u_0(x, t)$  và  $w_0(x, t)$  tương ứng là chuyển vị dọc trục và ngang của một điểm trên trục  $x$ ;  $t$  là thời gian, và  $(\dots)_x$  chỉ đạo hàm theo  $x$ . Biến dạng ( $\varepsilon$ ) và ứng suất ( $\sigma$ ) là:

$$\varepsilon_x = u_{0,x} - zw_{0,xx} \quad (2)$$

$$\sigma_x = E(z, T)\varepsilon_x = E(z, T)(u_{0,x} - zw_{0,xx})$$

Lực dọc trục  $N$  và mô men  $M$  nhận được từ ứng suất  $\sigma_x$  được định nghĩa như sau ( $A$  là diện tích mặt cắt ngang của dầm).

$$N = \int_A \sigma_{xx} dA; M = \int_A z\sigma_{xx} dA \quad (3)$$

Phương trình chuyển động cho dầm được xây dựng từ nguyên lý biến phân Hamilton:

$$\delta \int_1^2 \mathcal{L} dt = \delta \int_1^2 [T - (U + U_T + \mathcal{V})] dt = 0 \quad (4)$$

trong đó:  $\mathcal{L}$  là phiếm hàm Lagrange,  $T$ ,  $U$ ,  $U_T$ ,  $\mathcal{V}$  lần lượt là động năng, năng lượng biến dạng đàn hồi, năng lượng biến dạng do nhiệt độ và thế năng của các lực ngoài.

Phương trình chuyển động cho dầm có dạng:

$$\begin{cases} I_{11}\ddot{u}_0 - I_{12}\ddot{w}_{0,x} = N_{,x} \\ I_{11}\ddot{w}_0 - I_{12}\ddot{u}_{0,x} + I_{22}\ddot{w}_{0,xx} = M_{,xx} + N_T w_{0,xx} + P\delta(x-vt) \end{cases} \quad (5)$$

Sử dụng lý thuyết đàn hồi phi địa phương [1] đối với dầm nano FG Euler-Bernoulli, ứng suất tại một điểm có dạng (6). Trong đó  $e_0$  là hằng số vật liệu được xác định bằng thực nghiệm,  $a$  là kích thước đặc trưng bên

trong. Lấy tích phân công thức (6) đối với diện tích mặt cắt ngang dầm, ta thu được lực dọc  $N$  và mô men  $M$  (7):

$$\left[ \sigma_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} \right] = E(z) \varepsilon_{xx} \quad (6)$$

$$\left[ N - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] = A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$\left[ M - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \right] = A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Các đại lượng  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{22}$  tương ứng là độ cứng dọc trục, độ cứng tương hỗ giữa dọc trục và uốn, độ cứng chống uốn được định nghĩa như sau:

$$(A_{11}, A_{12}, A_{22}) = \int_A E(z, T)(1, z, z^2) dA \quad (8)$$

Phương trình chuyển động của dầm Nano FGM trong môi trường nhiệt độ là:

$$I_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - [A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(I_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2})]_{,x} = 0$$

$$I_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + I_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - N_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q - [A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} - A_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu(I_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_{12} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} - I_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - N_T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - q)]_{,xx} = 0$$

với  $q = P\delta(x - vt)$ ,  $P$  là biên độ của lực.

Để giải phương trình trên, sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn với phần tử dầm phẳng hai nút Bernoulli có 6 bậc tự do. Khi đó,  $u(x)$ ,  $w(x)$  của tiết diện ngang được tính  $u = \mathbf{H}_u \mathbf{d}$ ,  $w = \mathbf{H}_w \mathbf{d}$ , trong đó  $\mathbf{H}_u$ ,  $\mathbf{H}_w$  là ma trận hàm dạng tuyến tính và Hermit. Véc-tơ chuyển vị nút  $\mathbf{d}$  của một phần tử dầm. Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn Galerkin trong nội bộ một phần tử và lấy tích phân từng phần với chú ý các điều kiện biên. Phương trình dao động của dầm nano FG trong môi trường nhiệt độ chịu tác dụng của tải trọng di động có dạng như sau:

$$(\mathbf{M} + \mu \mathbf{M}_n) \ddot{\mathbf{D}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_T) \mathbf{D} = \mathbf{F}_{ex} \quad (9)$$

trong đó:  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M}_n$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_T$  lần lượt là véc-tơ chuyển vị nút, ma trận khối lượng nhất quán, ma trận khối lượng do ảnh hưởng của tham số phi địa phương (nonlocal), ma trận độ cứng và ma trận độ cứng do ảnh hưởng của nhiệt độ được tổng hợp từ các ma trận phần tử:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{uu} + \mathbf{m}_{uw} + \mathbf{m}_{ww}$$

$$\mathbf{m}_{uu} = \int_0^l \mathbf{N}_u^T I_{11} \mathbf{N}_u dx; \mathbf{m}_{uw} = - \int_0^l \mathbf{N}_u^T I_{12} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{m}_{ww} = \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T I_{22} \mathbf{N}_{w,xx} dx + \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T I_{22} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{m}^{nl} = \mathbf{m}^{nl}_{uu} + \mathbf{m}^{nl}_{uw} + \mathbf{m}^{nl}_{wu} + \mathbf{m}^{nl}_{ww}$$

$$\mathbf{m}_{uu}^{nl} = \int_0^l \mathbf{N}_{u,xx}^T I_{11} \mathbf{N}_{u,xx} dx; \mathbf{m}_{uw}^{nl} = - \int_0^l \mathbf{N}_{u,xx}^T I_{12} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{m}_{wu}^{nl} = - \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T I_{12} \mathbf{N}_{u,xx} dx;$$

$$\mathbf{m}_{ww}^{nl} = - \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T I_{11} \mathbf{N}_w dx + \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T I_{22} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{uu} + \mathbf{k}_{uw} + \mathbf{k}_{wu} + \mathbf{k}_{ww}$$

$$\mathbf{k}_{uu} = \int_0^l \mathbf{N}_{u,xx}^T A_{11} \mathbf{N}_{u,xx} dx; \mathbf{k}_{uw} = - \int_0^l \mathbf{N}_{u,xx}^T A_{12} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_{wu} = - \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T A_{12} \mathbf{N}_{u,xx} dx; \mathbf{k}_{ww} = \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T A_{22} \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$$\mathbf{k}_T = \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T N_T \mathbf{N}_{w,xx} dx + \mu \int_0^l \mathbf{N}_{w,xx}^T N_T \mathbf{N}_{w,xx} dx$$

$\mu = (e_0 a)^2$  là tham số phi địa phương,  $\mathbf{F}_{ex}$  là véc-tơ tải trọng nút. Để giải phương trình (9) sử dụng phương pháp tích phân trực tiếp Newmark. Cụ thể là phương pháp gia tốc trung bình, một thuật toán ổn với sự ổn định không điều kiện.

### 3. KẾT QUẢ SỐ VÀ THẢO LUẬN

Xét một dầm giản đơn được tổ hợp từ vật liệu là thép không gỉ (SUS304) và Nitrit Silic ( $\text{Si}_3\text{N}_4$ ).

#### 3.1. Kiểm nghiệm mô hình

Từ bảng 1 và 2 cho thấy kết quả của nghiên cứu rất gần với kết quả các công bố trước đó. Điều đó cho thấy sự phù hợp và độ tin cậy cao của mô hình. Tham số tần số ( $\bar{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho_c A / E_c I}$ ),  $\omega$  là tần số cơ bản của dầm.

**Bảng 1. So sánh tham số tần số của dầm nano giản đơn (S-S) với  $L/h=20$ ;  $\Delta T=20\text{K}$**

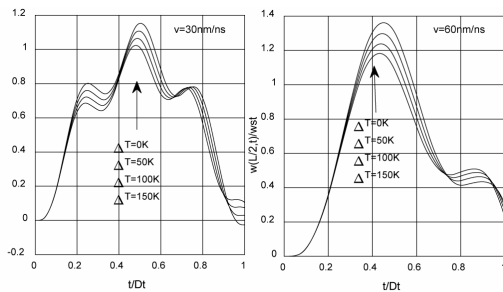
$\mu$	$n=0.1$		$n=1$	
	[4]	Bài báo	[4]	Bài báo
0	8.4674	8.6670	5.7121	5.9416
1	8.0532	7.9186	5.4266	5.4237
2	7.6901	7.3155	5.1761	5.0059
3	7.3684	6.8269	4.9539	4.6671
4	7.0806	6.4030	4.7548	4.4089

**Bảng 2. So sánh  $fD$  tại giữa dầm nano cho trường hợp một lực di động ( $\mu=0, \Delta T=0$ )**

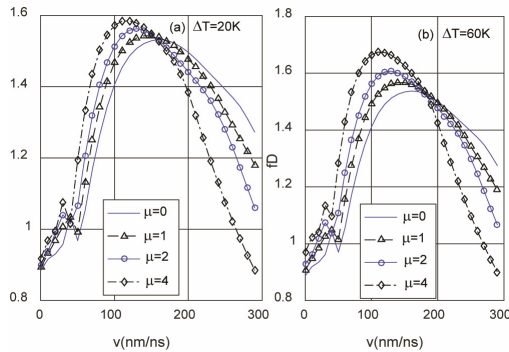
Nguồn	$Al_2O_3$	$n = 0.2$	$n = 2$	SUS304
	(252m/s)*	(222m/s)	(164m/s)	(132m/s)
Bài báo	0.9293	1.0339	1.3325	1.7260
[2]	0.9317	1.0333	1.3359	1.7301
[3]	0.9328	1.0344	1.3376	1.7324

**3.2. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ võng động**

Hình 1 cho thấy, với cả hai giá trị của vận tốc, số chu trình dao động của dầm ở nhiệt độ phòng không khác khi tăng nhiệt độ. Với hầu hết thời gian lực di động trên dầm độ võng của dầm tăng cùng với sự tăng của nhiệt độ và đạt được giá trị lớn nhất ở thời điểm muộn hơn. Dạng điệu của đường cong biểu thị mối liên hệ giữa độ võng lớn nhất giữa dầm với vận tốc khi tăng nhiệt độ không khác so với dầm thuần nhất thể hiện trên hình 2.



**Hình 1. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến độ võng giữa dầm theo thời gian ( $n = 5, \mu = 2$ )**



**Hình 2. Ảnh hưởng của nhiệt độ đến  $fD$  theo vận tốc,  $n = 5$**

Giá trị độ võng động tăng khi tăng nhiệt độ và đạt được giá trị lớn nhất ở vận tốc nhỏ hơn. Ảnh hưởng của tham số phi địa phương của dầm nano đặc biệt rõ nét hơn khi tăng nhiệt độ. Theo bảng 3 ta thấy, với  $\mu = 1$  khi thay đổi nhiệt độ giá trị tăng lớn nhất khoảng 1,8% nhưng với  $\mu = 3$  giá trị là khoảng 6,5%. Ở cùng một nhiệt độ  $fD$  tăng khoảng 13% khi  $\mu$  tăng từ 1 lên 3.

**Bảng 3. Bảng giá trị  $fD$  theo các thông số**

$\mu$	$v$ (m/s)	$\Delta T$ (K)	$n$			
			0.1	0.5	2	5
1	25	0	0.7148	0.8040	0.9308	0.9594
		50	0.7275	0.8154	0.9476	0.9752
		100	0.7407	0.8269	0.9646	0.9913
3	25	0	0.7366	0.8344	0.9051	0.9884
		50	0.7633	0.8718	0.9568	1.0510
		100	0.7920	0.9118	1.0167	1.1193

**4. KẾT LUẬN**

Nhiệt độ có ảnh hưởng rõ nét đến độ võng động của dầm có kích thước nano. Đặc biệt, sự thay đổi đó rõ rệt khi kết hợp với sự thay đổi của tham số vật liệu chế tạo dầm và ảnh hưởng của hiệu ứng kích thước nano. Các kết quả nghiên cứu này là phát hiện cần thiết giúp các kỹ sư thiết kế có cơ sở để lựa chọn các thông số hợp lý cho việc thiết kế các kết cấu dầm có kích thước nano trong môi trường nhiệt độ cao.

**5. TÀI LIỆU THAM KHẢO**

- [1] Eringen. 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J Appl Phys, 54(9). Pp 4703-4710.
- [2] Khalili, Jafari, and Eftekhari. 2010. A mixed Ritz-DQ method for forced vibration of functionally graded beams carrying moving loads. Composite Structures.
- [3] Şimşek and Kocatürk. 2009. Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load. Composite Structures.
- [4] Ebrahimi, Salari. 2015. Nonlocal thermo-mechanical vibration analysis of functionally graded nanobeams in thermal environment. Acta Astronautica.